Лекция 9
Методы численного решения дифференциальных и интегральных уравнений

Вопросы лекции

1. Основные понятия в области дифференциальных и интегральных уравнений.
2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Методы решения уравнений с частными производными.

Вопрос 1.
Основные понятия в области дифференциальных и интегральных уравнений

1. Постановка задач. Инженеру-исследователю постоянно приходится в своей деятельности сталкиваться с дифференциальными уравнениями. Многие задачи механики, физики, химии и других отраслей науки и техники при их математическом моделировании сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники.

В зависимости от числа независимых переменных дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных.

К интегральным уравнениям приводят многие инженерные задачи (в радиотехнике, газовой динамике, квантовой механике и т. п.). Интегральная форма уравнений движения в виде законов сохранения используется также и при построении консервативных разностных схем для некоторых типов задач (в частности, в механике сплошной среды).

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функций $y = y(x)$. Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

где x — независимая переменная.

Наивысший порядок n входящей в уравнение (7.1) производной называется *порядком дифференциального уравнения*. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

В ряде случаев из общей записи дифференциального уравнения (7.1) удается выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$\begin{gathered} y' = f(x, y), \\ y'' = f(x, y, y'). \end{gathered} \tag{7.2}$$

Такая форма записи называется *уравнением, разрешенным относительно старшей производной*.

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных. Например, $y' - x^2 y = \sin x$ — линейное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения (7.1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (7.1) содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{7.3}$$

где (7.3) является решением уравнения (7.1) при любых значениях C_1, $C_2, \ldots, C_n$, а любое решение уравнения (7.1) можно представить в виде (7.3) при некоторых $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi(x, C). \tag{7.4}$$

Если постоянная принимает определенное значение $C = C_0$, то получается частное решение

$$y = \varphi(x, C_0).$$

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках.

Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется *задачей Коши*. Дополнительные условия в задаче Коши называются *начальными условиями*, а точка $x = x_0$, в которой они задаются, — *начальной точкой*.

Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши: для заданных x_0, y_0 найти такое решение $y = y(x)$ уравнения (7.2), что $y(x_0) = y_0$. Таким образом, теорема Коши дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

Если же для уравнения порядка $n > 1$ дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется *краевой*. Сами дополнительные условия называются при этом *граничными* (или *краевыми*) *условиями*. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение.

Пример численного решения однородного дифференциального уравнения

Во многих практических задачах искомые функции зависят от нескольких переменных, и описывающие такие задачи уравнения могут содержать частные производные искомых функций. Они называются *уравнениями с частными производными*.

К решению дифференциальных уравнений с частными производными приводят, например, многие задачи механики сплошных сред. Здесь в качестве искомых функций обычно служат плотность, температура, напряжение и др., аргументами которых являются координаты рассматриваемой точки пространства, а также время.

Полная математическая постановка задачи наряду с дифференциальными уравнениями содержит также некоторые дополнительные условия. Если решение ищется в ограниченной области, то задаются условия на ее границе, называемые *граничными* (*краевыми*) *условиями*. Такие задачи называются *краевыми задачами* для уравнений с частными производными.

Если одной из независимых переменных в рассматриваемой задаче является время t, то задаются некоторые условия (например, значения искомых параметров) в начальный момент t_0, называемые *начальными условиями*. Задача, которая состоит в решении уравнения при заданных начальных условиях, называется *задачей Коши* для уравнения с частными производными. При этом задача решается в неограниченном пространстве и граничные условия не задаются. Задачи, при формулировке которых ставятся граничные и начальные условия, называются *нестационарными* (или *смешанными*) *краевыми задачами*. Получающиеся при этом решения меняются с течением времени.

Мы будем рассматривать лишь достаточно узкий класс задач для уравнений первого и второго порядков, линейных относительно производных. (Напомним, что порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной.) В случае двух независимых переменных x, y эти уравнения можно записать в виде

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\,\frac{\partial u}{\partial x} + e\,\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g. \tag{8.1}$$

Здесь $u = u(x, y)$ — искомая функция. Коэффициенты a, b, c, d, e, f и правая часть g, вообще говоря, могут зависеть от переменных x, y и искомой функции u. В связи с этим уравнение (8.1) может быть: а) с постоянными коэффициентами; б) линейным, если g линейно зависит от u, а коэффициенты зависят только от x, y; в) квазилинейным, если коэффициенты зависят от u; это самый общий вид уравнения (8.1).

Существуют различные виды уравнений в зависимости от соотношения между коэффициентами. Рассмотрим некоторые из них. При $a=b=c=f=$ $=0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$ получается уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial y} = q,$$

называемое *уравнением переноса*. На практике в этом уравнении одной из переменных может быть время t. Тогда его называют также *эволюционным уравнением*.

Если хотя бы один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля, то (8.1) является уравнением второго порядка. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - ac$ оно может принадлежать к одному из трех типов: *гиперболическому* ($D > 0$), *параболическому* ($D = 0$) или *эллиптическому* ($D < 0$).

Приведем примеры уравнений с частными производными второго порядка, которые будем в дальнейшем рассматривать:

волновое уравнение (гиперболическое)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

уравнение теплопроводности или *диффузии* (параболическое)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0;$$

уравнение Лапласа (эллиптическое)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если правая часть последнего уравнения отлична от нуля, то оно называется *уравнением Пуассона*.

Приведенные уравнения называются *уравнениями математической физики*. К их решению сводятся многие прикладные задачи.

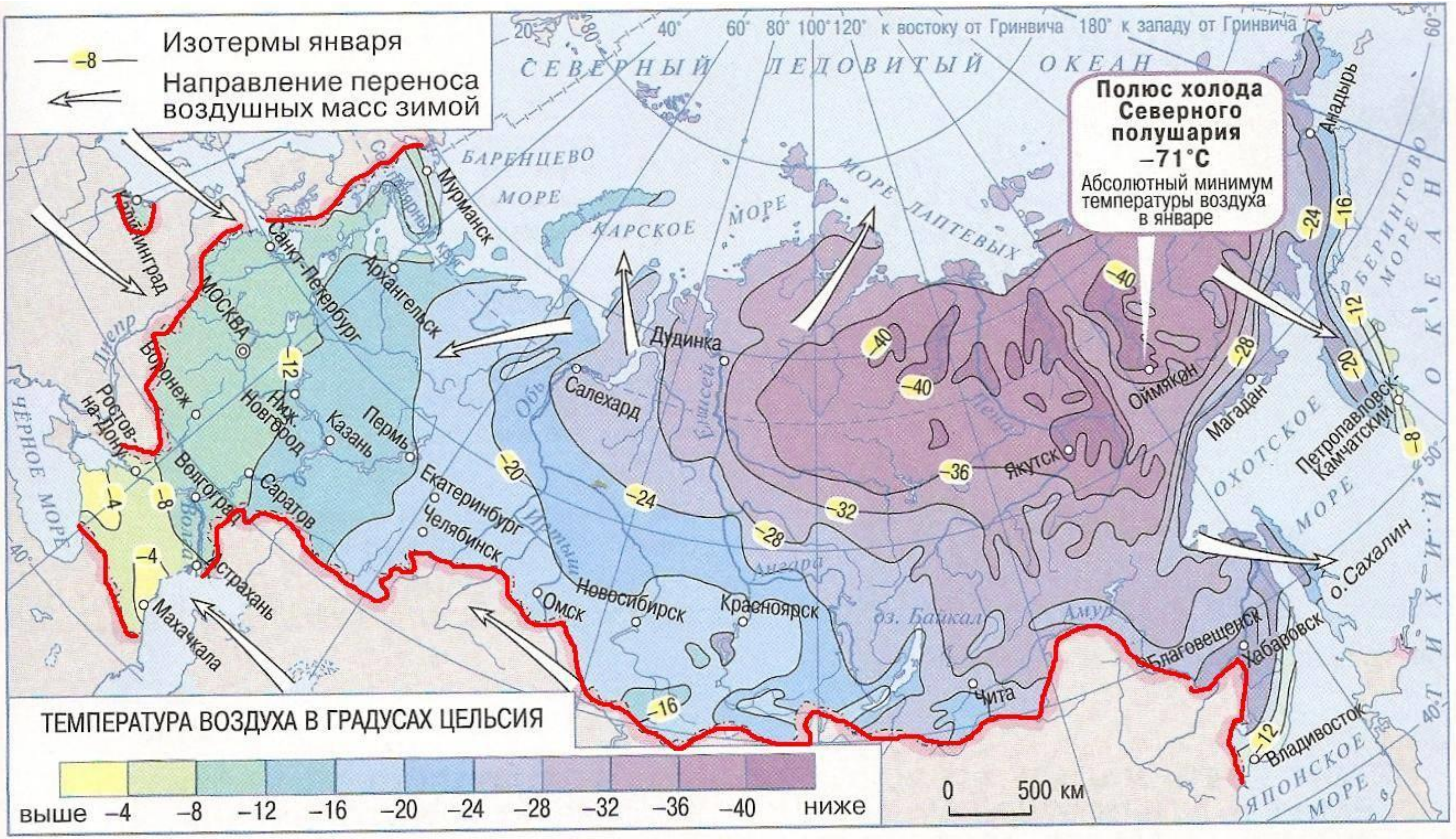


Рис. 41. Средние температуры воздуха в январе

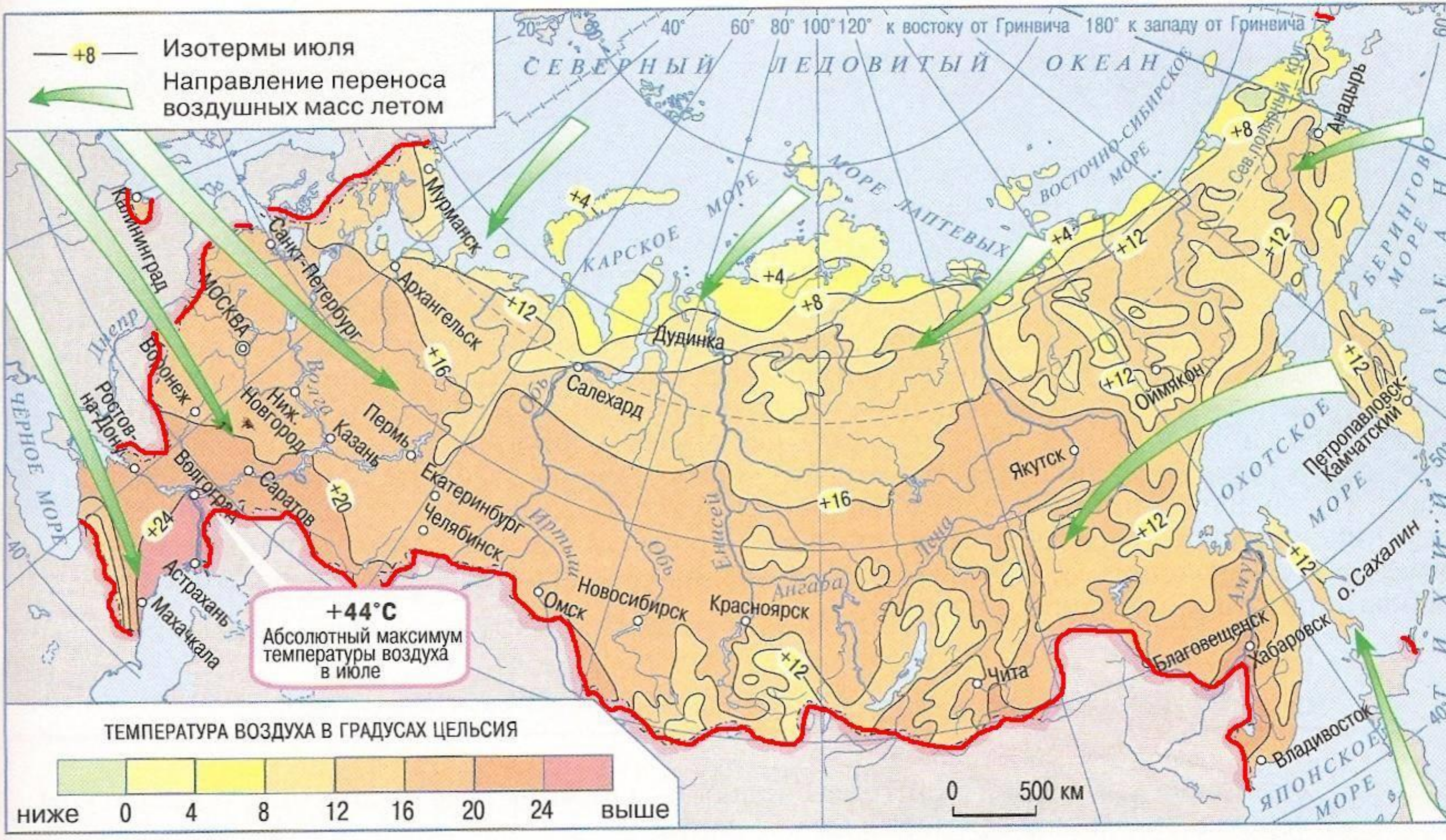
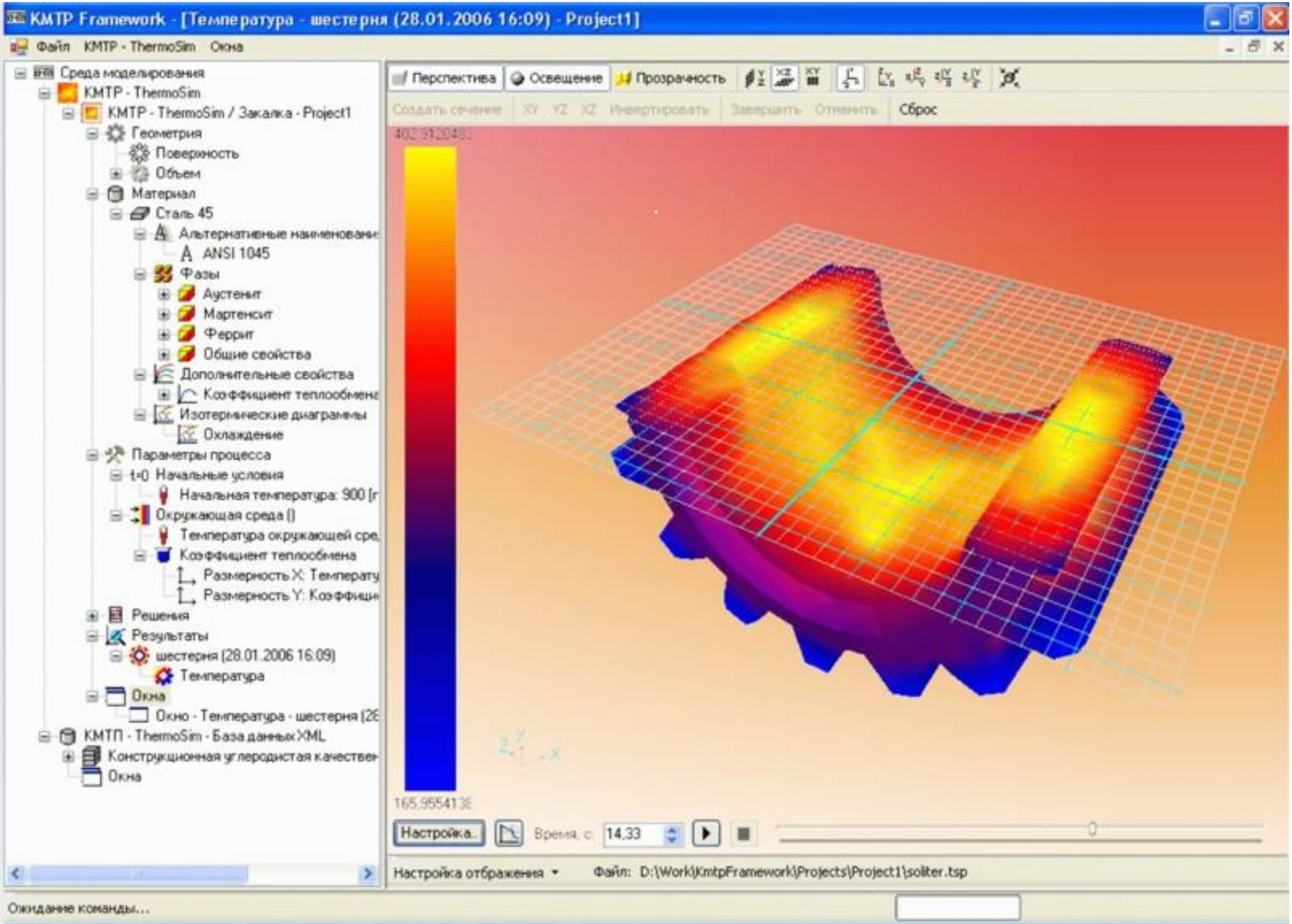
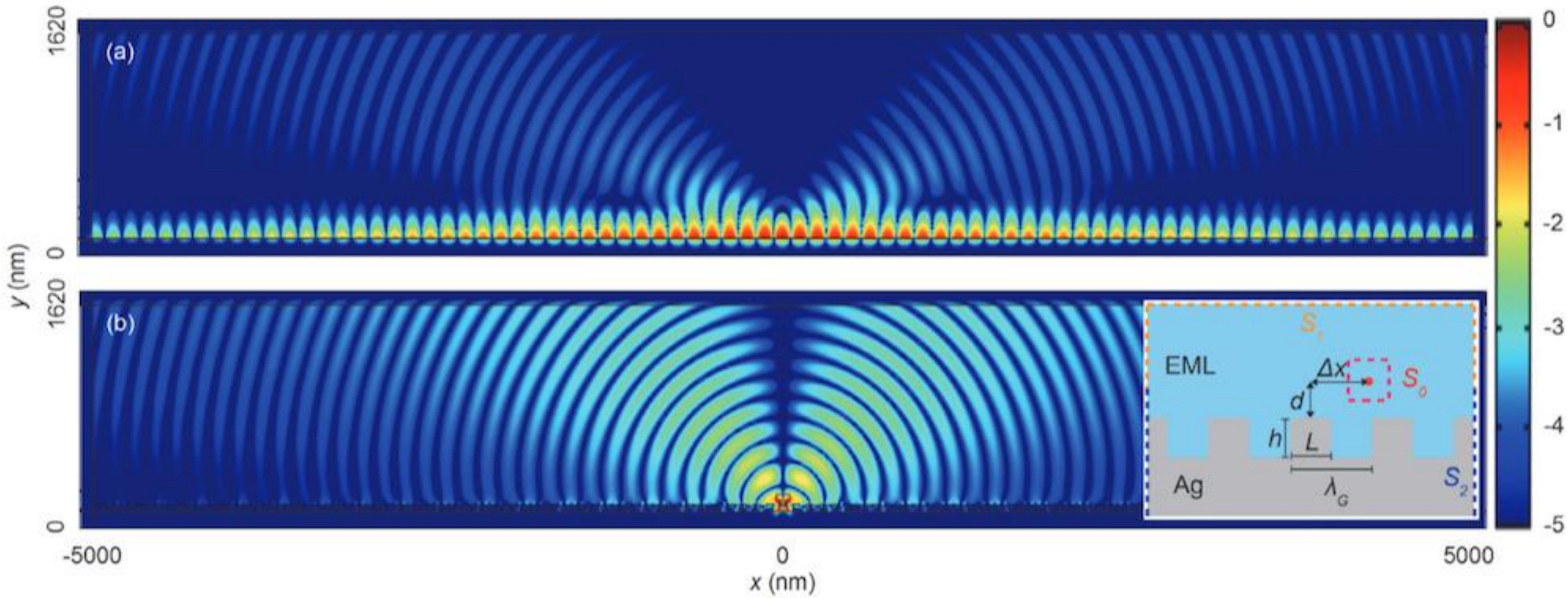
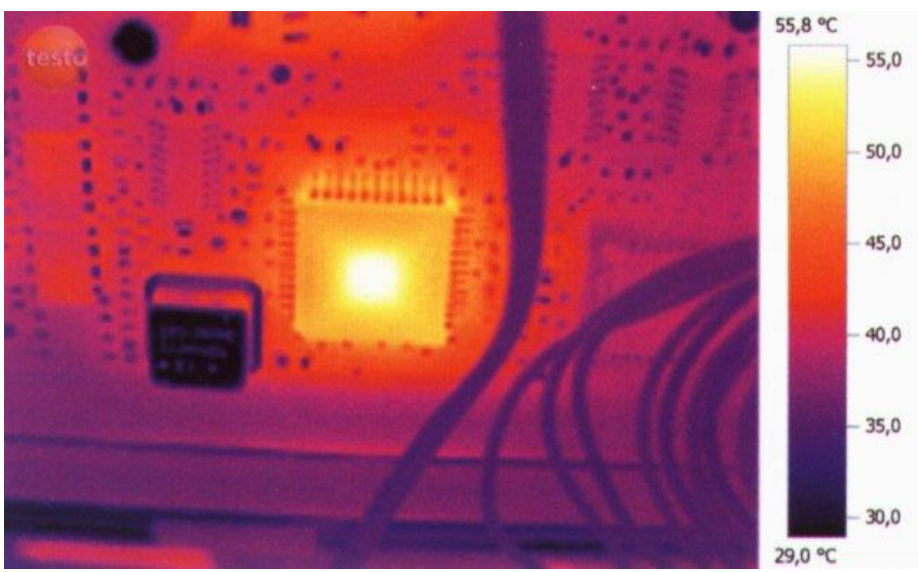
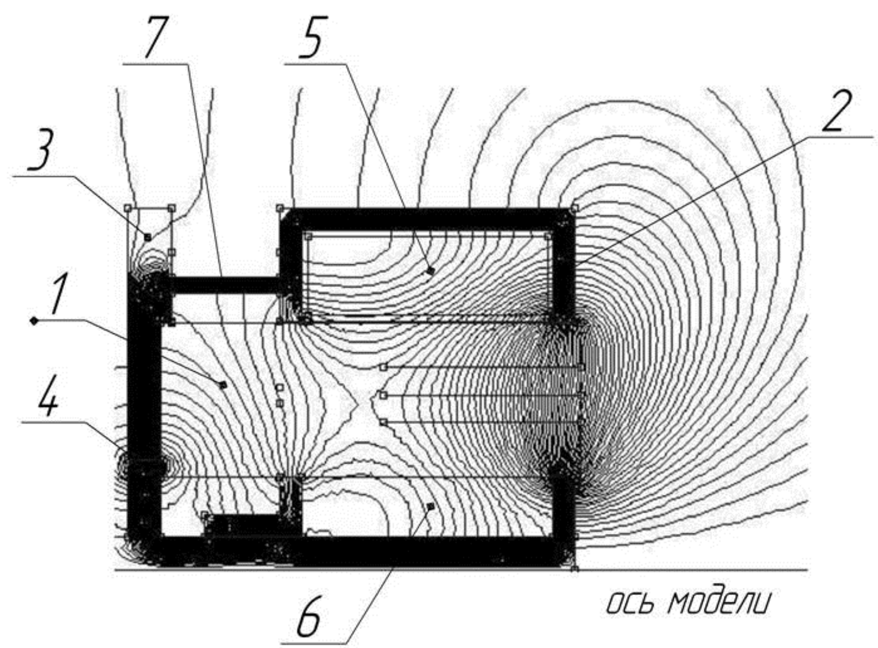


Рис. 43. Средние температуры воздуха в июле


KMTP Framework - [Температура - шестерня (28.01.2006 16:09) - Project1]
Файл
KMTP - ThermoSim
Окна
Среда моделирования
KMTP - ThermoSim
KMTP - ThermoSim / Закалка - Project1
Геометрия
Поверхность
Объем
Материал
Сталь 45
ANSI 1045
Фазы
Аустенит
Мартенсит
Феррит
Общие свойства
Дополнительные свойства
Изотермические диаграммы
Охлаждение
Параметры процесса
t=0 Начальные условия
Окружающая среда ()
Коэффициент теплообмена
Решения
Результаты
шестерня (28.01.2006 16:09)
Температура
Окна
KMTП - ThermoSim - База данных XML
Окна
Перспектива
Освещение
Прозрачность
Сброс
Настройка..
Время, с
14,33
Настройка отображения
Файл: D:\Work\KmtpFramework\Projects\Project1\solter.tsp
Ожидание команды...


(a)
(b)
1620
0
1620
0
y (nm)
-5000
0
5000
x (nm)
0
-1
-2
-3
-4
-5
EML
Ag
S1
S0
S2
Δx
d
h
L
λG


testo
55,8 °C
55,0
50,0
45,0
40,0
35,0
30,0
29,0 °C


7
5
2
3
1
4
6
ось модели

Интегральным уравнением называется такое уравнение, неизвестная функция в котором содержится под знаком интеграла. В общем случае интегральное уравнение имеет вид

$$\int\limits_a^b K(x, s, y(s))\, ds = f(x, y(x)), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{9.1}$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция, $K(x, s, y)$ — *ядро* интегрального уравнения, $f(x, y)$ — правая часть уравнения, s — переменная интегрирования.

К интегральным уравнениям приводят многие инженерные задачи (в радиотехнике, газовой динамике, квантовой механике и т. п.). Интегральная форма уравнений движения в виде законов сохранения используется также и при построении консервативных разностных схем для некоторых типов задач (в частности, в механике сплошной среды).

Для решения некоторых задач удобнее использовать интегральные уравнения, чем дифференциальные. Например, постановку задачи Коши

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

можно представить в виде интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Таким образом, интегральное уравнение содержит полную постановку задачи, и дополнительные условия (начальные или граничные) для него задавать не нужно.

Отметим еще одно преимущество интегральных уравнений. Уравнение (9.1) записано для случая одной независимой переменной x. Однако легко записать его многомерный аналог при наличии независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для некоторой области G в рассматриваемом n-мерном пространстве многомерное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\int_G K(x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_n, y(s_1, \ldots, s_n))\, ds_1 \ldots ds_n = \\ = f(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n)).$$

Методы решения одномерных уравнений естественно обобщаются на случай многомерных интегральных уравнений (одномерные интегралы заменяются многомерными). В то же время при рассмотрении дифференциальных уравнений переход от одномерного случая (обыкновенные уравнения) к многомерному (уравнения с частными производными) требует совершенно других подходов и методов решения.

Виды интегральных уравнений. Ограничимся рассмотрением одномерных уравнений (9.1). Приведем некоторые частные случаи таких уравнений, которые, с одной стороны, важны в практических приложениях и, с другой стороны, наиболее изучены.

Уравнения (9.1), в которые искомая функция входит линейно, называются *линейными интегральными уравнениями*. Одним из них является *уравнение Фредгольма первого рода*

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{9.2}$$

Уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{9.3}$$

В уравнениях Фредгольма ядро $K(x,s)$ определено и ограничено на квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$. Если $K(x,s) = 0$ при $s > x$, т. е. ядро отлично от нуля только на треугольнике $a \leqslant s \leqslant x$, $a \leqslant x \leqslant b$, то уравнения (9.2) и (9.3) переходят в *уравнения Вольтерра* соответственно *первого* и *второго рода*:

$$\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \tag{9.4}$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x). \tag{9.5}$$

<u>Вопрос 2</u>
Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Основной учебник. Стр.194-223

Вопрос 3

Методы решения уравнений с частными производными

Основной учебник. Стр.224-270

Конец лекции